Pergamon

Int. J. Heat Mass Transfer. Vol. 39, No. 12, pp. 2525–2537, 1996

0017–9310/96 $15.00+0.00

0017–9310(95)00352–5

Méthode de Nachtsheim et Swigert étendue à l'étude des couches limites laminaires bidimensionnelles planes ou axisymétriques non isothermes, avec effusion

G. A. CAMPOLINA FRANÇA†‡, M. FORTES‡ et A. LALLEMAND†

† Centre de Thermique de l'INSA de Lyon, URA CNRS 1372, 20, Av. Albert-Einstein, 69621 Villeurbanne, France and ‡ Departamento de Engenharia Mecânica da UFMG, Av. Antônio Carlos 6627, 31270-901 Belo Horizonte, Brasil

(*Received* 4 *November* 1994 *and in final form* 25 *July* 1995)

Abstract—Nachtsheim et Swigert ont développé une méthode de tir très efficace pour la résolution des équations de la couche limite laminaire des écoulements isothermes avec profils de vitesses semblables. Nous présentons, dans ce travail, une extension de cette méthode pour la résolution des équations de la couche limite des écoulements laminaires externes, bidimensionnels ou axisymétriques, avec ou sans effusion, dans les cas de profils de vitesses non semblables, en présence ou non de gradient de pression. On tient compte des propriétés variables des deux fluides de nature différente en écoulement non isotherme. L'efficacité de la méthode généralisée est vérifiée sur quatre cas d'écoulements laminaires. Un échantillonnage des résultats obtenus : profils de vitesse, de température et de concentration, coefficients de frottement, flux de chaleur à la surface de la paroi, est comparé avec les résultats de la littérature.

1. INTRODUCTION

Les équations de la couche limite des écoulements laminaires externes incompressibles ou compressibles, en présence ou non de gradients de pression et de température et avec ou sans effusion à travers la paroi, peuvent être résolues par plusieurs méthodes numériques. On peut citer, par exemple, la méthodes itérative d'intégration de Picard [1, 2], les méthodes intégrales de Von Kàrmàn-Pohlhausen et de Thwaites [3–6], les méthodes classiques de tir ou de l'essai et de l'erreur [4–9], les schémas implicites et explicites des différences finies [3, 5, 6, 10–12] et ceux des éléments finis [11, 13–15], la méthode des volumes finis [11, 16], la méthode du problème inverse [5, 17], etc. Les équations de la couche limite ont des conditions aux limites de type classique à la paroi et de type asymptotique à la frontière de la couche limite. De ce fait, la résolution numérique de ces équations présente toujours des problèmes de convergence, notamment dans les méthodes du type de l'essai et de l'erreur. Par contre, dans la méthode de tir proposée par Nachtsheim et Swigert [18], la recherche de la solution numérique est faite de telle façon que la caractéristique asymptotique de la solution est toujours assurée et les risques de divergence sont réduits. Ces auteurs ont prouvé l'efficacité de leur méthode en résolvant, d'une part l'équation de Falkner-Skan, d'autre part les équations concernant un problème de convection dans un écoulement laminaire incompressible, sans effusion, avec des profils de vitesse semblables. Cette méthode a été utilisé par Ferreira [19] dans les calculs des transferts de masse et de chaleur par convection naturelle dans un écoulement laminaire incompressible sur une paroi poreuse plane verticale. Sparrow *et al.* [20] ont aussi utilisé la méthode de Nachtsheim et Swigert pour la résolution de problèmes concernant les écoulements laminaires bidimensionnels avec propriétés thermophysiques constantes.

Dans ce travail on généralise la méthode de Nachtsheim et Swigert pour la résolution des équations de la couche limite des écoulements laminaires, bidimensionnels ou axisymétriques, externes à des corps solides, dans les cas de profils de vitesses semblables ou non, avec ou sans effusion, en présence ou non de gradient de pression, et en tenant compte des propriétés variables des deux fluides de nature différente en écoulement non isotherme. L'efficacité de la méthode, qui permet notamment de déterminer avec précision les flux thermiques et les coefficients de frottement à la paroi, est vérifiée sur quatre cas d' écoulements laminaires externes.

2. PRESENTATION DU PROBLEME GENERAL ET DES EQUATIONS ASSOCIEES

Soit l'écoulement laminaire, en régime stationnaire, d'un gaz le long de la surface d'un corps solide immobile avec ou sans injection d'un autre gaz à travers la surface (Fig. 1) et respectant les conditions suivantes :

- l'écoulement est axisymétrique ou bidimensionnel plan ;

NOMENCLATURE

B	paramètre du gradient de pression
C_f	coefficient de frottement
c_p	capacité thermique massique à pression constante
c_v	capacité thermique massique à volume constante
D	diffusivité moléculaire
E	erreur donnée par l'équation (25a)
E_e	valeur minimale préétablie pour E
E_F	valeur minimale préétablie pour l'erreur relative entre les valeurs de s à la convergence actuelle et à la convergence précédente
E_s	valeur minimale préétablie pour la valeur du pas de s
F	fonction de courant adimensionnelle
$F0$	paramètre d'injection
g	accélération de la pesanteur
L	abscisse de début d'effusion; valeur maximale de x
m	masse
M	masse molaire
Nu	nombre de Nusselt
P	pression statique absolue
Pr	nombre de Prandtl
s	variable de perturbation
q	variable de perturbation ; flux de chaleur
r	variable de perturbation ; rayon de courbure transversale
R	constante universelle des gaz parfaits ; rayon de la sphère
Re	nombre de Reynolds
Sc	nombre de Schmidt
T	température absolue
u	vitesse parallèle à la paroi
v	vitesse orthogonale à la paroi
x	abscisse le long de la paroi
X	fraction molaire
y	ordonnée perpendiculaire à la paroi
z	variable de perturbation générique.

Symboles grecs

α	paramètre de Chapman–Rubesin
δ	erreur ; épaisseur de la couche limite hydrodynamique
δ_d	épaisseur de déplacement
γ	rapport entre les capacités thermiques massiques isobarique et isochorique
λ	conductivité thermique
η	ordonnée de Levy–Lees
μ	viscosité moléculaire dynamique
ν	viscosité moléculaire cinématique
θ	température adimensionnelle
ρ	masse volumique
ω	fraction massique
ξ	abscisse de Levy–Lees
ψ	fonction de courant.

Indices inférieurs

1	fluide principal (ou pariétal)
2	fluide injecté (ou effusé)
e	évalué dans l'écoulement potentiel ou à la frontière de la couche limite
FS	relatif à la transformation de Falkner-Skan
i	composant i dans le mélange gazeux
p	évalué à la paroi
o	évalué au point d'arrêt (stagnation)
ξ	évalué à la position ξ
∞	évalué dans l'écoulement libre.

Indice supérieur

$'$	dérivée par rapport à η.

- les propriétés thermophysiques du mélange gazeux varient notamment avec la température et la concentration des gaz 1 et 2 ;
- la température du gaz 2 sortant de la paroi est constante et égale à la température T_p de la paroi ;
- la température du mélange gazeux à la frontière de la couche limite est constante et égale à la température T_e du gaz 1 dans l'écoulement potentiel ;
- la vitesse du mélange gazeux à la frontiére de la couche limite est égale à la vitesse u_e du gaz 1 dans l'écoulement potentiel ;
- l'injection du gaz 2 commence immédiatement après le point $x = L$ et, en ce point, les profils de vitesse, température et concentration, dans l'écoulement pariétal, sont non uniformes et donnés par la solution des profils des vitesses semblables des équations de la couche limite ;
- le gaz 1, le gaz 2 et leur mélange sont des gaz parfaits neutres et transparents à la radiation thermique ;
- l'épaisseur de la couche est très petite devant le rayon de courbure transversal r de la paroi ;
- le flux massique net du gaz 1 est toujours nul à la surface du corps.

En ajoutant les hypothèses classiques de la couche limite, les équations de bilan s'écrivent :

Conservation de la masse totale

$$\frac{1}{r^n}\frac{\partial(\rho u r^n)}{\partial x}+\frac{\partial \rho v}{\partial y}=0. \qquad (1)$$

Variation de la quantité de mouvement selon x

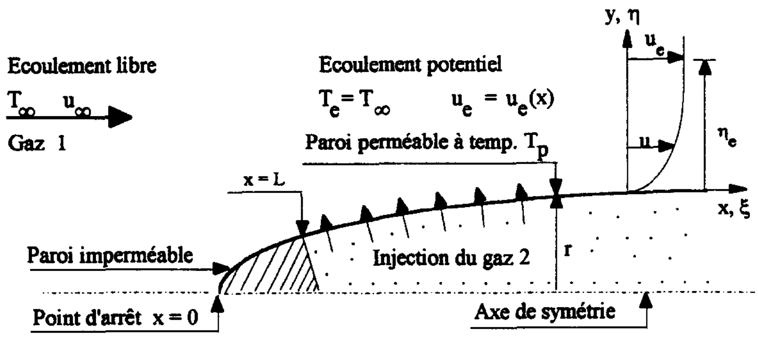

Fig. 1. Schéma général pour l'écoulement axisymétrique avec effusion.

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\left[\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right] \quad (2)$$

où le gradient de pression $\partial P/\partial x$, égal à celui qui existe dans l'écoulement potentiel, est donné par

$$\frac{\partial P}{\partial x} = -\rho_e u_e \frac{du_e}{dx}. \quad (2a)$$

Conservation de l'énergie

$$\rho c_p\left(u\frac{\partial T}{\partial x} + v\frac{\partial T}{\partial y}\right) = u\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial y}\right) + \rho D(c_{p2} - c_{p1})\frac{\partial \omega_1}{\partial y}\frac{\partial T}{\partial y} + \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2. \quad (3)$$

Conservation de l'espèce chimique 1 du mélange fluide

$$\frac{1}{r^n}\frac{\partial(\rho_1 u r^n)}{\partial x} + \frac{\partial \rho_1 v}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\rho D\frac{\partial \omega_1}{\partial y}\right). \quad (4)$$

Les conditions aux limites associées à ces équations sont :
à la paroi, soit à $y = 0$

$$u = 0; \quad v = v_p(x), \quad T = T_p$$

et, d'après un bilan de masse sur le composant 1,

$$\left(\frac{\partial \omega_1}{\partial y}\right)_p = \frac{v_p \omega_{1p}}{D_p}$$

à une position suffisamment éloignée de la paroi, soit à $y \to \infty$

$$u \to u_e(x), \quad T \to T_e \quad \text{et} \quad \omega_1 \to 1.$$

Dans toutes les équations précédentes, x est la coordonnée curviligne comptée à partir du bord d'attaque le long de la paroi, y la coordonnée orthogonale à la paroi, u la vitesse selon la direction x, v la vitesse selon la direction y, ρ la masse volumique du mélange gazeux, μ la viscosité moléculaire, λ la conductivité thermique, D le coefficient de diffusion moléculaire, c_p la capacité thermique massique à pression constante, ω_1 le rapport entre la masse volumique du gaz 1 dans le mélange et celle du mélange, P la pression absolue et T la température absolue du mélange. Les indices p et e signifient que les valeurs sont évaluées à la paroi et à la frontière de la couche limite respectivement. L'exposant n caractérise le type de l'écoulement, soit 1 pour les écoulements axisymétriques et 0 pour les écoulements bidimensionnels plans. La vitesse v_p du gaz 2 à la paroi et la vitesse u_e du gaz 1 dans l'écoulement potentiel sont des fonctions connues de x.

2.1. *Transformation de variables de Levy–Lees*

Les couches limites laminaires axisymétriques, non-isothermes et en présence de gradients de pression, sont souvent analysées à l'aide du changement de variables de Levy–Lees, qui inclut la transformation de Mangler [3, 5, 6]. On pose, alors :

$$\eta = \frac{u_e r^n}{\sqrt{2\xi}}\int_0^y \rho\, dy; \quad \xi = \int_0^x \rho_e \mu_e u_e r^{2n}\, dx;$$
$$\psi = \sqrt{2\xi}F(\xi,\eta) \quad (5)$$

ψ et F étant des fonctions de courant telles que

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = -\rho v r^n; \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = \rho u r^n \quad (6)$$

et

$$F = \int_0^\eta \frac{u}{u_e} d\eta. \quad (6a)$$

En procédant au changement de variables, les équations de la couche limite deviennent :

- Variation de la quantité de mouvement

$$\frac{\partial}{\partial \eta}(\alpha F'') + FF'' + B\left(\frac{\rho_e}{\rho} - F'^2\right) = 2\xi\left(F'\frac{\partial F'}{\partial \xi} - F''\frac{\partial F}{\partial \xi}\right). \quad (7)$$

- Conservation de l'énergie

$$\frac{1}{c_p}\frac{\partial}{\partial \eta}(\alpha c_p \theta'/Pr) + F\theta' + \frac{\alpha}{c_p Sc}(c_{p1} - c_{p2})\omega_1'\theta' + \frac{\alpha u_e^2}{c_p T_0}F''^2$$

$$-\frac{Bu_e^2\rho_e}{c_pT_0\rho}F' = 2\xi\left(F'\frac{\partial\theta}{\partial\xi}-\theta'\frac{\partial F}{\partial\xi}\right). \quad (8)$$

• Conservation de l'espèce chimique 1

$$\frac{\partial}{\partial\eta}(\alpha\omega_1'/Sc)+F\omega_1' = 2\xi\left(F'\frac{\partial\omega_1}{\partial\xi}-\omega_1'\frac{\partial F}{\partial\xi}\right). \quad (9)$$

On note que, à la suite de cette transformation de variables, l'équation de la conservation de la masse totale n'apparaît plus. En fait, elle est toujours satisfaite par les relations (6).

Dans les équations (7)–(9) :

$$F' = \frac{\partial F}{\partial\eta} = \frac{u}{u_e} \quad \alpha = \frac{\rho\mu}{\rho_e\mu_e} \quad \text{et} \quad B = \frac{2\xi}{u_e}\frac{du_e}{d\xi} \quad (10)$$

$$\theta = \frac{T}{T_0} \quad T_0 = T_e + \frac{u_e^2}{2c_{pe}}. \quad (11)$$

B est le paramètre du gradient de pression dans l'écoulement, T_0 la température de stagnation ou du point d'arrêt, $Pr = \mu c_p/\lambda$ le nombre de Prandtl et $Sc = \mu/\rho D$ le nombre de Schmidt du mélange gazeux. Pour plus de commodité on note les diverses dérivations par rapport à η avec les indices supérieurs $'$, $''$ ou $'''$.

Les conditions aux limites associées aux équations (7)–(9) sont :

• à la paroi, soit à $\eta = 0$

— dans les cas des profils de vitesses semblables dans l'écoulement

$$F_p = F0 = \text{constante et}\left(\frac{\partial F}{\partial\eta}\right)_p = 0$$

$$\theta = \theta_p$$

$$\left(\frac{\partial\omega_1}{\partial\eta}\right)_p = -\frac{F0Sc_p\omega_{1p}}{\alpha_p} \quad (12a)$$

— et dans les cas des profils de vitesses non semblables

$$F_p = -\frac{1}{\sqrt{2\xi}}\int_0^x r^n(\rho v)_p\,dx \quad \text{et} \quad \left(\frac{\partial F}{\partial\eta}\right)_p = 0$$

$$\theta = \theta_p$$

$$\left(\frac{\partial\omega_1}{\partial\eta}\right)_p = \frac{\sqrt{2\xi}\omega_{1p}(\rho v)_pSc_p}{r^nu_e(\rho\mu)_p}. \quad (12b)$$

• à une position suffisamment éloignée de la paroi, soit à $\eta = \eta_e \to \infty$

$$\left(\frac{\partial F}{\partial\eta}\right)_e \to 1\,; \quad (\theta)_e \to \theta_e\,; \quad (\omega_1)_e \to 1. \quad (12c)$$

En pratique, la valeur de η_e sera déterminée de telle sorte qu'elle soit supérieure à l'épaisseur de chacune des couches limites dynamique, thermique et de concentration.

2.2. *Propriétés thermophysiques des fluides*

Les propriétés thermophysiques d'un mélange gazeux à deux composants peuvent être estimées à l'aide des relations suivantes [6, 7, 10] :

• Masse volumique

$$\rho = \frac{PM_1M_2}{RT[M_1+\omega_1(M_2-M_1)]} \quad (13a)$$

R étant la constante universelle des gaz parfaits et M la masse molaire du gaz considéré. On pose encore

$$\rho = \rho_1+\rho_2 \quad (13b)$$

• Viscosité moléculaire

$$\mu = \frac{\mu_1}{1+a_{12}\dfrac{X_2}{X_1}} + \frac{\mu_2}{1+a_{21}\dfrac{X_1}{X_2}} \quad (13c)$$

avec

$$\mu_i = \sum_{j=0}^{n} A_{i,j}T^j \quad (13d)$$

$$a_{12} = \left[1+\left(\frac{\mu_1}{\mu_2}\right)^{1/2}\left(\frac{M_2}{M_1}\right)^{1/4}\right]^2 \Bigg/ \left[2^{1,5}\left(1+\frac{M_1}{M_2}\right)^{1/2}\right] \quad (13e)$$

a_{21} est calculé par (13e) en y changeant l'indice 1 par l'indice 2 et *vice-versa*. X_1 et X_2 sont les fractions molaires des composants 1 et 2, respectivement, dans le mélange gazeux.

• Capacité thermique massique à pression constante

$$c_p = c_{p2}+\omega_1(c_{p1}-c_{p2}) \quad (13f)$$

avec

$$c_{pi} = \sum_{j=0}^{n} B_{i,j}T^j. \quad (13g)$$

• Capacité thermique massique à volume constant

$$c_{vi} = c_{pi} - \frac{R}{M_i} \quad (13h)$$

• Conductivité thermique

$$\lambda = \frac{\lambda_1}{1+1{,}065a_{12}\dfrac{X_2}{X_1}} + \frac{\lambda_2}{1+1{,}065a_{21}\dfrac{X_1}{X_2}} \quad (13i)$$

avec

$$\lambda_i = \tfrac{1}{4}(9\gamma_i-5)c_{vi}\mu_i. \quad (13j)$$

• Diffusivité moléculaire donnée par la théorie cinétique des gaz

$$D_{12} = D_{21} = D =$$

$$1{,}858\times10^{-7}T^{1,5}\left(\frac{M_1+M_2}{M_1M_2}\right)^{0,5}\left(\frac{101{,}3}{P\Omega\sigma_{12}}\right). \quad (13k)$$

Dans l'équation (13k)

– Ω est l'intégrale de collision donnée par

$$\Omega = \left(\frac{T}{T_{\varepsilon 12}}\right)^{-0,145} + \left(\frac{T}{T_{\varepsilon 12}} + 0,5\right)^{-2,0} \quad (13l)$$

– $T_{\varepsilon 12}$ est la température effective de collision définie par

$$T_{\varepsilon 12} = (T_{\varepsilon 1} T_{\varepsilon 2})^{0,5} \quad (13m)$$

– σ_{12} est le diamètre effectif de collision défini par

$$\sigma_{12} = 0,5(\sigma_1 + \sigma_2) \quad (13n)$$

– $T_{\varepsilon 1}$, $T_{\varepsilon 2}$ et σ_1, σ_2 sont les températures et les diamètres de collision des gaz 1 et 2, respectivement.

3. MÉTHODE DE TIR DE NACHTSHEIM ET SWIGERT

Nachtsheim et Swigert [1] ont résolu l'équation de Falkner–Skan (équation (7) simplifiée pour les écoulements isothermes avec profils de vitesse semblables) en utilisant une méthode de tir qui s'appuie sur les quatre idées directrices suivantes :

1°— Les solutions des équations de la couche limite sont asymptotiques. Cela veut dire que toutes les dérivées d'ordre égal ou supérieur à F'', θ' et ω_1' sont nulles à la frontière η_e de la couche limite.

2°— Les conditions aux limites à η_e sont remplacées par des conditions supplémentaires à la paroi. Ces conditions, inconnues *a priori*, interviennent comme des variables de perturbation qu'il convient de faire évoluer jusqu'à ce que les conditions réelles à η_e soient vérifiées.

3°— L'intégration des équations différentielles transformées de la couche limite est faite numériquement selon la méthode d'Adams–Moulton du quatrième ordre [21].

4°—La recherche des valeurs optimales des variables de perturbation est faite en cherchant à minimiser, à chaque pas, les erreurs entre les valeurs et les conditions établies à η_e, non seulement sur la grandeur étudiée mais également sur sa dérivée, de manière à assurer la caractéristique asymptotique de la solution.

3.1. *Extension de la méthode au problème général posé*

On a étendu la démarche développée par Nachtsheim et Swigert à la résolution du système d'équations (7)–(9). Dans ce cas, la fonction de courant F est dépendante de ξ et il y a trois conditions à $\eta = \eta_e$, déjà établies en (12c). Lors de la résolution numérique ces conditions seront à remplacer par :

$$\left(\frac{\partial F}{\partial \eta}\right)_e = 1\,; \quad (\theta)_e = \theta_e\,; \quad (\omega_1)_e = 1 \quad (14a)$$

et

$$F''(\xi, \eta_e) = 0\,; \quad \theta'(\xi, \eta_e) = 0\,; \quad \omega_1'(\xi, \eta_e) = 0. \quad (14b)$$

Pour l'application de la méthode de tir proposée, il faut choisir trois conditions supplémentaires à la paroi, outre les conditions (12a) ou (12b). Ces conditions à $\eta = 0$ sont :

$$F''(\xi, 0) = s \quad \theta'(\xi, 0) = r \quad \omega_1(\xi, 0) = q. \quad (14c)$$

Les valeurs optimales de s, r et q (variables dites de perturbation) seront celles qui permettront de vérifier le système d'équations suivant, à $\eta = \eta_e$:

$$\begin{aligned} F_e'(s,r,q) &= 1 \\ \theta_e(s,r,q) &= \theta_e \\ \omega_{1_e}(s,r,q) &= 1 \\ F_e''(s,r,q) &= 0 \\ \theta_e'(s,r,q) &= 0 \\ \omega_{1_e}'(s,r,q) &= 0. \end{aligned} \quad (15)$$

Les erreurs au voisinage de η_e associées à de petites variations de r, s et q sont définies a partir des équations (15). En utilisant des développements en série de Taylor on écrit :

$$\begin{aligned} \delta_1 &= F' + F_s'\Delta s + F_r'\Delta r + F_q'\Delta q - 1 \\ \delta_2 &= \theta + \theta_s\Delta s + \theta_r\Delta r + \theta_q\Delta q - \theta_e \\ \delta_3 &= \omega_1 + \omega_{1_s}\Delta s + \omega_{1_r}\Delta r + \omega_{1_q}\Delta q - 1 \\ \delta_4 &= F'' + F_s''\Delta s + F_r''\Delta r + F_q''\Delta q \\ \delta_5 &= \theta' + \theta_s'\Delta s + \theta_r'\Delta r + \theta_q'\Delta q \\ \delta_6 &= \omega_1' + \omega_{1_s}'\Delta s + \omega_{1_r}'\Delta r + \omega_{1_q}'\Delta q. \end{aligned} \quad (16)$$

En notant par f une fonction quelconque de ξ et η, telle que F, F', F'', F''', θ, θ', θ'', ω_1, ω_1' ou ω_1'', et z une variable de perturbation quelconque, telle que s, r ou q, on définit, pour l'équation (16), les notations suivantes :

$$f_z = \frac{\partial f}{\partial z}; \quad f_z' = \frac{\partial f'}{\partial z} \quad \text{et} \quad f_z'' = \frac{\partial f''}{\partial z}.$$

Les valeurs des dérivées de F', F'', θ, θ', ω_1 et ω_1' par rapport à s, r et q à $\eta = \eta_e$ sont donneées par les solutions numériques des 9 équations de perturbation qu'on obtient en dérivant chacune des équations (7)–(9) par rapport à s, r et q. Les équations qui en résultent sont :

$$\alpha F_z''' + \alpha' F_z'' + F_z F'' + F F_z'' - 2BF'F_z' = g_F(\xi, \eta, z) \quad (17)$$

$$\frac{1}{c_p}\left(\frac{\alpha c_p}{Pr}\right)\theta_z'' + \frac{1}{c_p}\left(\frac{\alpha c_p}{Pr}\right)'\theta_z' + F_z\theta' + F\theta_z' + \frac{\alpha}{c_p Sc}(c_{p1} - c_{p2})(\omega_{1_z}'\theta' + \omega_1'\theta_z') + 2\frac{\alpha u_e^2}{c_p T_0}F''F_z'' - \frac{B u_e^2 \rho_e}{c_p T_0 \rho}F_z' = g_\theta(\xi, \eta, z) \quad (18)$$

$$\left(\frac{\alpha}{Sc}\right)\omega''_{1_z}+\left(\frac{\alpha}{Sc}\right)'\omega'_{1_z}+F_z\omega'_1+F\omega'_{1_z}=g_{\omega 1}(\xi,\eta,z) \tag{19}$$

avec

$$g_F(\xi,\eta,z)=2\xi\left[F'_z\frac{\partial F'}{\partial \xi}+F'\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial F'}{\partial \xi}\right)-F''_z\frac{\partial F}{\partial \xi}-F''\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial F}{\partial \xi}\right)\right] \tag{17a}$$

$$g_\theta(\xi,\eta,z)=2\xi\left[F'_z\frac{\partial \theta}{\partial \xi}+F'\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \theta}{\partial \xi}\right)-\theta'_z\frac{\partial F}{\partial \xi}-\theta'\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial F}{\partial \xi}\right)\right] \tag{18a}$$

$$g_{\omega_1}(\xi,\eta,z)=2\xi\left[F'_z\frac{\partial \omega_1}{\partial \xi}+F'\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \omega_1}{\partial \xi}\right)-\omega'_{1_z}\frac{\partial F}{\partial \xi}-\omega'_1\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial F}{\partial \xi}\right)\right]. \tag{19a}$$

Les dérivées par rapport à z des termes des propriétés thermophysiques des fluides ont été négligées dans les équations (17)–(19). Une justification de cette simplification sera donnée plus loin.

Les conditions aux limites associées à ces équations, à $\eta = 0$ et pour ξ quelconque, sont :

$$\frac{\partial F}{\partial z}=\frac{\partial F'}{\partial z}=\frac{\partial F''}{\partial q}=\frac{\partial F''}{\partial r}=0 \quad \frac{\partial F''}{\partial s}=1$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial z}=\frac{\partial \theta'}{\partial q}=\frac{\partial \theta'}{\partial s}=0 \quad \frac{\partial \theta'}{\partial r}=1$$

$$\frac{\partial \omega_1}{\partial s}=\frac{\partial \omega_1}{\partial r}=\frac{\partial \omega'_1}{\partial z}=0 \quad \frac{\partial \omega_1}{\partial q}=1 \tag{20}$$

où z est mis pour s, q ou r.

Les valeurs de Δs, Δr et Δq sont déterminées à chaque pas par le critère de minimisation, à $\eta = \eta_e$, de la somme des carrés des erreurs données par (16). Ainsi, Δs, Δr et Δq sont les solutions du système d'équations suivant :

$$\frac{\partial\left(\sum_{i=1}^{6}\delta_i^2\right)}{\partial(\Delta s)}=0;\quad \frac{\partial\left(\sum_{i=1}^{6}\delta_i^2\right)}{\partial(\Delta r)}=0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial\left(\sum_{i=1}^{6}\delta_i^2\right)}{\partial(\Delta q)}=0 \tag{21}$$

qui peut être mis sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \Delta s \\ \Delta r \\ \Delta q \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_2 \end{bmatrix} \tag{21a}$$

avec

$$A_{11}=F_s'^2+\theta_s^2+\omega_{1_s}^2+F_s''^2+\theta_s'^2+\omega_{1_s}'^2$$

$$A_{22}=F_r'^2+\theta_r^2+\omega_{1_r}^2+F_r''^2+\theta_r'^2+\omega_{1_r}'^2$$

$$A_{33}=F_q'^2+\theta_q^2+\omega_{1_q}^2+F_q''^2+\theta_q'^2+\omega_{1_q}'^2$$

$$A_{12}=F'_sF'_r+\theta_s\theta_r+\omega_{1_s}\omega_{1_r}+F''_sF''_r+\theta'_s\theta'_r+\omega'_{1_s}\omega'_{1_r}$$

$$A_{13}=F'_sF'_q+\theta_s\theta_q+\omega_{1_s}\omega_{1_q}+F''_sF''_q+\theta'_s\theta'_q+\omega'_{1_s}\omega'_{1_q}$$

$$A_{23}=F'_rF'_q+\theta_r\theta_q+\omega_{1_r}\omega_{1_q}+F''_rF''_q+\theta'_r\theta'_q+\omega'_{1_r}\omega'_{1_q}$$

$$A_{21}=A_{12};\quad A_{31}=A_{13};\quad A_{32}=A_{23}$$

$$B_1=F'F'_s+\theta\theta_s+\omega_1\omega_{1_s}+F''F''_s+\theta'\theta'_s+\omega'_1\omega'_{1_s}-F'_s-\theta_e\theta_s-\omega_{1_s}$$

$$B_2=F'F'_r+\theta\theta_r+\omega_1\omega_{1_r}+F''F''_r+\theta'\theta'_r+\omega'_1\omega'_{1_r}-F'_r-\theta_e\theta_r-\omega_{1_r}$$

$$B_3=F'F'_q+\theta\theta_q+\omega_1\omega_{1_q}+F''F''_q+\theta'\theta'_q+\omega'_1\omega'_{1_q}-F'_q-\theta_e\theta_q-\omega_{1_q}.$$

La solution du problème général s'obtient donc en résolvant le système de 12 équations constitué par les 3 équations (7)–(9) auxquelles il faut ajouter les 9 équations de perturbation dont les formes générales sont données par (17)–(19), avec les conditions aux limites (12a ou 12b), (14) et (20). Il faut noter que, pour la résolution numérique de ce système à l'aide de la méthode d'intégration d'Adams–Moulton, ces 12 équations du troisième et du deuxième ordre sont transformées en un système de 28 équations du premier ordre non développé ici. On note également que, pour $\xi = 0$, la solution de ce système d'équations est obtenue en considérant l'hypothèse des profils de vitesses semblables.

Lors de la résolution de ce sytème, l'intégration des équations selon η, à chaque valeur de ξ, est faite d'une part en considérant que la dérivée par rapport à η d'une propriété thermophysique quelconque $\boldsymbol{g}$ est donnée par :

$$\frac{\partial \boldsymbol{g}}{\partial \eta}=T_0\frac{\partial \boldsymbol{g}}{\partial T}\frac{\partial \theta}{\partial \eta}+\frac{\partial \boldsymbol{g}}{\partial \omega_1}\frac{\partial \omega_1}{\partial \eta} \tag{22}$$

d'autre part, en estimant les dérivées d'une fonction quelconque $f(\xi,\eta)$ par rapport à ξ par une formule du premier ordre des différences finies en arrière, pour la première valeur de ξ suivant $\xi = 0$, soit :

$$\frac{\partial f}{\partial \xi}=\frac{f_\xi-f_{\xi_1}}{\xi} \tag{23a}$$

et par une formule du deuxième ordre, pour les valeurs suivantes de ξ, soit :

$$\frac{\partial f}{\partial \xi}=\frac{(2\xi-\xi_1-\xi_2)}{(\xi-\xi_1)(\xi-\xi_2)}f_\xi-\frac{\xi-\xi_2}{(\xi-\xi_1)(\xi_1-\xi_2)}f_{\xi 1}+\frac{\xi-\xi_1}{(\xi-\xi_2)(\xi_1-\xi_2)}f_{\xi 2}. \tag{23b}$$

Dans les relations (23), ξ est la valeur 'actuelle' de la coordonnée de Levy–Lees, ξ_1 et ξ_2 sont, respectivement, les valeurs au pas précédent et à deux pas précédents et f_ξ, f_{ξ_1} et f_{ξ_2} sont les valeurs de la fonction f évaluées aux mêmes abscisses.

De plus, la discrétisation des dérivées de f par rapport à une variable de perturbation z tient compte des relations suivantes :

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial \xi}\right) = \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right) \quad \text{et} \quad \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_{\xi_1} = \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_{\xi_2} = 0. \tag{24}$$

Cette dernière équation présuppose que la variable de perturbation z à ξ n'a plus influence sur la fonction f considérée aux valeurs précédentes de ξ.

Pour chaque valeur de ξ on fait varier η_e à partir d'une valeur initiale préétablie et, pour chaque valeur de η_e, les corrections de s, r et q sont réalisées jusqu'à ce que Δs soit inférieur à une valeur préétablie E_s. Notons que, quand la valeur de η, à la position actuelle de ξ, est supérieure à la valeur η_e à la position de ξ précédente, les valeurs d'une fonction quelconque $f(\xi, \eta)$ et de ses dérivées sont estimées par une formule d'extrapolation du cinquième ordre. Enfin, le test de convergence pour une valeur de η_e donnée à ξ donné est effectué sur la valeur de E qui représente la somme des carrés des différences entre chaque quantité calculée et sa valeur asymptotique à η_e :

$$E < E_e \tag{25}$$

où E_e est une valeur préétablie et E est défini par :

$$\begin{aligned} E = {} & [1 - F'(\eta_e, \xi)]^2 + [\theta_e - \theta(\eta_e, \xi)]^2 \\ & + [1 - \omega_1(\eta_e, \xi)]^2 + [F''(\eta_e, \xi)]^2 \\ & + [\theta'(\eta_e, \xi)]^2 + [\omega_1'(\eta_e, \xi)]^2 \end{aligned} \tag{25a}$$

Et, si les propriétés thermophysiques des fluides varient, un dernier test est fait sur la dérivée seconde de $F(\xi, \eta)$ à la paroi, soit :

$$\left|\frac{s - s_a}{s}\right| < E_F \tag{25b}$$

où E_F et une valeur préétablie et s et s_a sont les valeurs de $\partial^2 F(\xi, 0)/\partial \eta^2$ à la convergence actuelle et à la convergence précédente, respectivement. La convergence, dans ce cas, correspond à la verification, à la fois, des relations $\Delta s < E_s$ et $E < E_e$.

4. APPLICATION ET VALIDATION DE LA MÉTHODE

4.1. *Présentation des cas étudiés*

Afin de valider la méthode de résolution proposée, celle-ci a été appliquée à quatre cas d'écoulements laminaires dont les solutions sont disponibles dans la littérature. Les définitions des types d'écoulements et les valeurs des principaux paramètres géométriques, thermophysiques et de calcul concernant chacun de ces cas sont présentées dans les tableaux 1(a et b). L'air est, dans tous les cas, le fluide en écoulement pariétal. Les propriétés thermophysiques des fluides sont considérées variables dans les cas 1 et 4. Pour ces deux cas, les valeurs des paramètres présentés dans le tableau 1a sont les résultats de la conversion au système international des données présentées, dans le système anglais d'unités, par Marvin et Sheaffer [10].

4.2. *Expressions utilisées pour le calcul de quelques paramètres importants*

Avant de présenter les résultats il convient de définir et de donner les expressions qui permettent de calculer certaines grandeurs utilisées dans les comparaisons qui fournissent des informations locales intéressantes. Il s'agit du coefficient de frottement local, du flux de chaleur local à la paroi et de l'épaisseur de déplacement.

- Coefficient de frottement à la paroi :

$$\frac{C_f}{2} = \frac{\mu_p \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_p}{\rho_e u_e^2}.$$

Pour les besoins du calcul on présente les expressions de $C_f/2$ obtenues avec les transformations de variables de Levy–Lees et avec celles de Falkner–Skan.

— Transformation de Levy–Lees

$$\frac{C_f}{2} = \frac{\mu_p}{\rho_e u_e^2}\left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)_p = \frac{\rho_p \mu_p r^n}{\rho_e \sqrt{2\xi}} \frac{\partial^2 F(\xi, 0)}{\partial \eta^2} \tag{26}$$

— Transformation de Falkner–Skan

$$\frac{C_f}{2} = \sqrt{\frac{\nu}{u_e x}} \frac{\partial^2 F_{FS}(x, 0)}{\partial \eta_{FS}^2}. \tag{26a}$$

L'équation de Falkner–Skan ainsi que les définitions de la fonction de courant F_{FS} et de la variable η_{FS} sont présentées par [4–6, 9, 22]. On a, dans ce cas, $\xi = x$.

Le coefficient de frottement dans l'écoulement laminaire sur une plaque plane (écoulement de Blasius) est donné par :

$$C_{f0} = \frac{0{,}664}{\sqrt{Re_\infty}} \quad \text{avec} \quad Re_\infty = \frac{\rho_\infty u_\infty x}{\mu_\infty} \tag{27}$$

- Flux de chaleur à la paroi selon la direction y :

$$q_p = -\lambda_p \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_p$$

— Transformation de Levy–Lees

$$q_p = -\lambda_p \left(\frac{\partial T}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)_p = -\frac{\lambda_p \rho_p u_e r^n T_0}{\sqrt{2\xi}} \frac{\partial \theta(\xi, 0)}{\partial \eta} \tag{28}$$

Le flux de chaleur adimensionel est défini par le rapport q_p/q_{pL}, où q_{pL} est le flux de chaleur pariétal à la

Tableau 1. (a) Caractérisation de l'écoulement et définition des paramètres thermophysiques dans les différents cas étudiés

cas	type d'écoulement	dP/dx	injection	$F0$ (ad.) ou $(\rho v)_p$ (kg/m^2·s)	L (m)	T_e (K)	T_p (K)	P (kPa)	$u_e(x)$ (m s^{-1})	u_∞ (m s^{-1})
1	sur plaque plane	$=0$	hélium	$-0{,}2455$	0,0	217	653	101,3	1182	1182
2	autour d'une sphère $R = 5$ cm	$\neq 0$	non	0,0		300	300	101,3	$1{,}5\sin(x/R)$	1
3	de Howarth	$\neq 0$	non	0,0		300	300	101,3	$1-(x/L)$	1
4	sur un cône demi-angle $=5°$	$=0$	hélium	$a-0{,}0$ $b-0{,}0166$ $c-0{,}0332$ $d-0{,}0604$	0,09525	80	319	1,25	1228	1228

(b) Paramètres de calcul utilisés dans les différents cas étudiés

	valeurs initiales							E_s		E_e	
cas	r	s	q	η_e	$\Delta\eta_e$	$\Delta\eta$	E_F	min.	max.	min.	max.
1	0,3	0,3	0,3	0,25	0,25	0,025	10^{-4}	10^{-15}	10^{-15}	10^{-15}	10^{-15}
2	—	0,3	—	0,25	0,10	0,01		10^{-15}	10^{-10}	10^{-15}	10^{-4}
3	—	0,3	—	0,25	0,10	0,01		10^{-15}	10^{-10}	10^{-15}	10^{-4}
4	0,3	0,3	0,3	0,25	0,25	0,025	10^{-4}	10^{-15}	10^{-10}	10^{-15}	10^{-6}

position $x = L$, c'est-à-dire juste avant le début de l'effusion.

• Epaisseur de déplacement :

$$\delta_d = \int_0^y \left(1 - \frac{\rho u}{\rho_e u_e}\right) dy \tag{29}$$

— Transformation de Levy–Lees :

$$\delta_d = \int_0^{y_e} \left(1 - \frac{\rho}{\rho_e} F'\right) dy \tag{29a}$$

où y_e et la valeur de y à $\eta = \eta_e$, pour une valeur donnée de ξ.

4.3. *Résultats et discussion*

4.3.1. *Premier cas : écoulement laminaire incompressible et non-isotherme de l'air sur une paroi plane poreuse avec injection d'hélium à travers la paroi et avec profils des vitesses semblables le long de la paroi.* Les profils semblables de vitesses, de température et de concentration en hélium, obtenus en résolvant les équations (7)–(9) et (17)–(19) avec $\xi = 0$, sont comparés sur la Fig. 2 avec un échantillonage de ceux obtenus par Marvin et Sheaffer [10] en utilisant un schéma implicite aux différences finies. On constate un accord parfait entre les deux méthodes.

4.3.2. *Deuxième cas : écoulement laminaire incompressible et isotherme sur une sphère imperméable de rayon* R. Sur la Fig. 3 on présente une comparaison entre les valeurs de

$$F''_{FS} = \frac{\partial^2 F_{FS}(x, 0)}{\partial \eta_{FS}^2}$$

calculées avec la méthode proposée et celles données par Smith et Clutter [9] en fonction de la coordonnée x/R en degrés. L'erreur maximale est 1,1%. Pour la position du point de décollement de la couche limite ces auteurs ont trouvé, par extrapolation, la valeur $x/R = 105{,}7°$ tandis que la valeur trouvée par notre méthode est $104{,}7°$.

Une formule aux différences finies en arrière du troisième ordre a été utilisée pour la discrétisation des dérivées par rapport à x pour atteindre la position $x = 0{,}09135$ m ($104.7°$), car avec la formule du deuxième ordre donnée par l'équation (23b) on n'a pas réussi à dépasser $x = 0{,}0912$ m.

Pour ces calculs, les valeurs suivantes des pas de x ont été retenues : 0,004 m pour $0 < x \leqslant 0{,}044$ m ; 0,002 m pour $0{,}044 < x \leqslant 0{,}088$ m ; 0,0004 m pour $0{,}088 < x \leqslant 0{,}0912$ m et 0,00005 m pour $0{,}0912 < x \leqslant 0{,}09135$ m.

4.3.3. *Troisième cas : écoulement laminaire incompressible et isotherme avec gradient inverse de pression (écoulement ralenti de Howarth).* Le rapport entre le coefficient de frottement C_f donné par l'équation (26a) et celui d'un écoulement de Blasius, C_{f0}, est présenté sur la Fig. 4 en fonction de la coordonnée adimensionnelle $x_L = x/L$, L étant la valeur maximale fixée pour x, soit 8 m. En comparant ces résultats, à ceux obtenus avec la série de Howarth-van Dike [6] donnée par

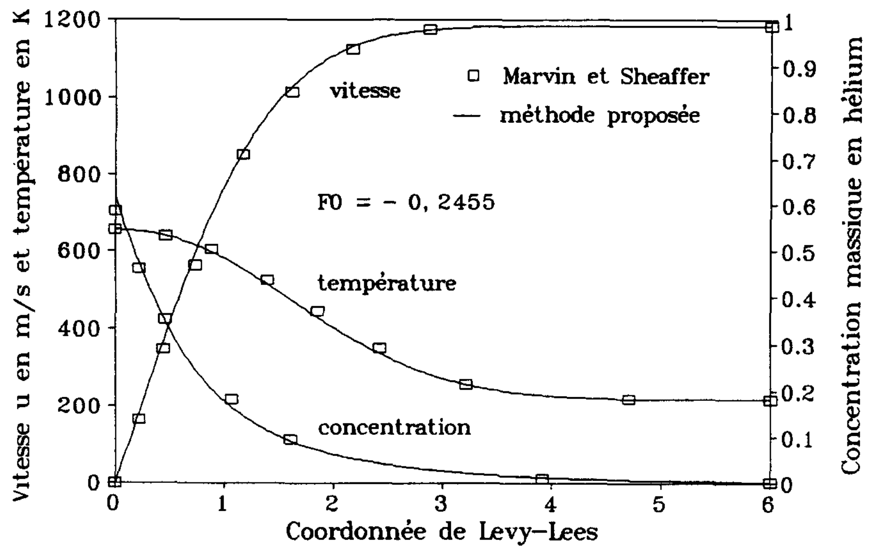

Fig. 2. Premier cas : profils semblables de vitesse, de température et de concentration en hélium en fonction de η (coordonneé de Levy–Lees).

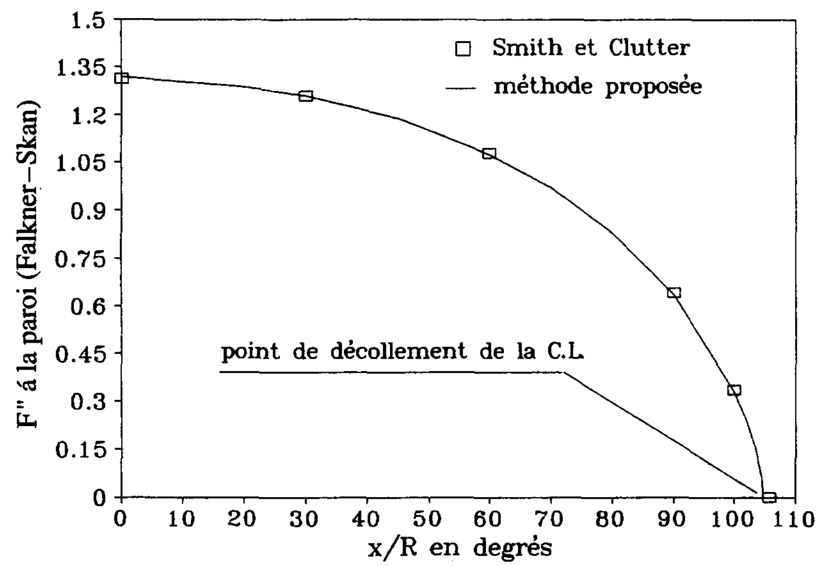

Fig. 3. Deuxième cas : F''_{FS} à la surface de la sphère en fonction de la coordonnée curviligne adimensionnelle x/R.

$$\frac{C_f}{C_{f0}} = 1 - 6{,}14677x_L - 3{,}33693x_L^2 - 21{,}5712x_L^3 - 114{,}67x_L^4 - 667{,}43x_L^5 - 4152{,}6x_L^6 - 27075x_L^7 - 182660x_L^8$$

on constate que l'erreur maximale et de 2,1% pour $0 < x_L \leqslant 0{,}1$. A partir de $x_L = 0{,}1$ les erreurs augmentent et les valeurs obtenues à l'aide de notre méthode tendent vers zéro lorsque x_L tend vers 0,12. Cette valeur, qui correspond à la position du point de décollement de la couche limite, et égale à celle obtenue avec une méthode précise de différences finies [6]. Smith et Clutter [9] ont aussi résolu ce problème en utilisant une méthode de tir dérivée de la méthode de Hartree–Womersley pour les écoulements incompressibles et isothermes. Ils ont trouvé, par extrapolation, la valeur $x = 0{,}960$ m, soit également $x_L = 0{,}12$ pour la position du point de décollement de la couche limite.

Une formule aux différences finies en arrière du troisième ordre a été utilisée pour la discrétisation des dérivées par rapport à x pour atteindre la position $x = 0{,}957$ m ($x_L = 0{,}1196$), car avec la formule du deuxième ordre donnée par l'équation (23b) on n'a pas réussi à dépasser $x = 0{,}952$ m ($x_L = 0{,}1190$).

Pour ces calculs, les valeurs suivantes des pas de x onte été retenues : 0,04 m pour $0 < x \leqslant 0{,}84$ m ; 0,01 m pour $0{,}84 < x \leqslant 0{,}94$ m ; 0,004 m pour $0{,}94 < x \leqslant 0{,}952$ m et 0,001 m pour $0{,}952 < x \leqslant 0{,}957$ m.

4.3.4. *Quatrième cas : écoulement laminaire non-isotherme de l'air sur la surface d'un cône, sans gradient de*

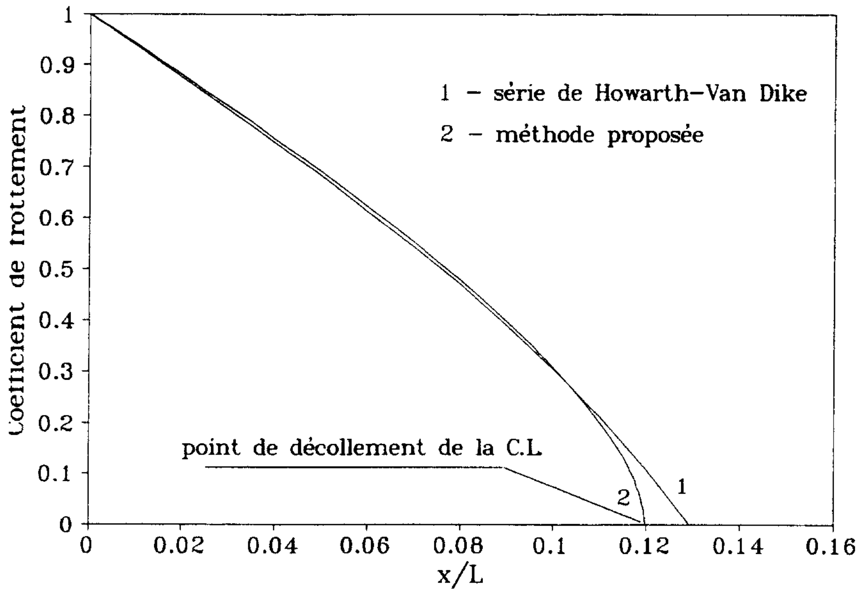

Fig. 4. Troisième cas : C_f/C_{f0} en fonction de la coordonnée adimensionnelle x/L.

pression, avec injection d'hélium et avec des propriétés thermophysiques des fluides variables. Les résultats obtenus correspondent aux solutions des équations (7)–(9) et (17)–(19) en considérant des profils de vitesses semblables ($F0$ = cte) pour $0 < x \leqslant L =$ 0,09525 m et des profils non semblables pour $x > L$. A partir de ces résultats, les flux de chaleur pariétaux selon η ont été calculés à chaque position de x. Les courbes des flux de chaleur adimensionnels présentés sur la Fig. 5(a) s'accordent très bien avec celles obtenus par Marvin et Sheaffer [10] qui utilisent une méthode de différences finies. Sur cette figure, les courbes 1, 2, et 3 diffèrent par les débits massiques d'injection de l'hélium. On présente sur les Fig. 5 (b et c), respectivement, l'évolution des coefficients de frottement et des épaisseurs de déplacement calculés de long de la surface du cône, pour quatre débits massiques d'injection d'hélium. Ces résultats n'ont pas pu être validés car la littérature consultée ne dispose pas de résultats comparables.

Le schéma de deuxième ordre des différences finies en arrière, donné par l'équation (23b), a été utilisé pour la discrétisation des dérivées par rapport à ξ.

Pour ces calculs on a utilisée la valeur, 0,09525 m pour le premier pas de x, 0,005 m pour le deuxième, puis deux fois la valeur du pas précédant pour $0{,}01025 < x \leqslant 0{,}94$ m.

5. CONCLUSIONS

Les résultats obtenus pour les quatre cas présentés et les essais poursuivis dans le développement de la méthode permettent de donner les conclusions suivantes :

(1) la précision de la méthode développée est équivalente à celle de la méthode classique des différences finies ;

(2) les temps de calcul nécessaires à la résolution des cas présentés sont compatibles avec la complexité du problème concerné et avec la précision des résultats obtenus. Ces temps, qui correspondent à l'user time d'une machine RISC système/600 Modèle 340-IBM AIX Version 3.2.5, sont présentés sur le tableau 2 ;

(3) la technique employée dans la recherche des variables de perturbation, soit les conditions aux limites inconnues à la paroi, rend cette méthode de tir efficace pour la résolution des couches limites laminaires y compris pour la détermination du point de décollement, en présence ou non de gradients de pression postitifs ou négatifs ;

(4) les valeurs initiales choisies pour s, r et ω_1 n'influent pas sur l'efficacité de la méthode, lorsqu'elles sont comprises entre 0 et 1. Des valeurs hors de ce domaine n'ont pas été testées ;

(5) la valeur du pas de η influe beaucoup sur les résultats des calculs tandis que la valeur du pas de η_e et la valeur de η_e influent plutôt sur la convergence de la méthode. L'erreur associée à la valeur choisie pour le pas $\Delta\eta$ de η dans la méthode d'intégration d'Adams–Moulton (21) est donnée par

$$\frac{251}{720}\Delta\eta^5\frac{\partial^5 f}{\partial\eta^5}.$$

Cette expression montre que l'établissement des valeurs optimales de $\Delta\eta$ à partir d'une analyse mathématique des erreurs associées aux équations (17)–(19), pour chaque type de problème concerné, est une tâche difficile qui n'a pas été entreprise. Cependant, les essais poursuivis pendant le développement de la méthode permettent de suggérer (voir tableau 1b) des valeurs

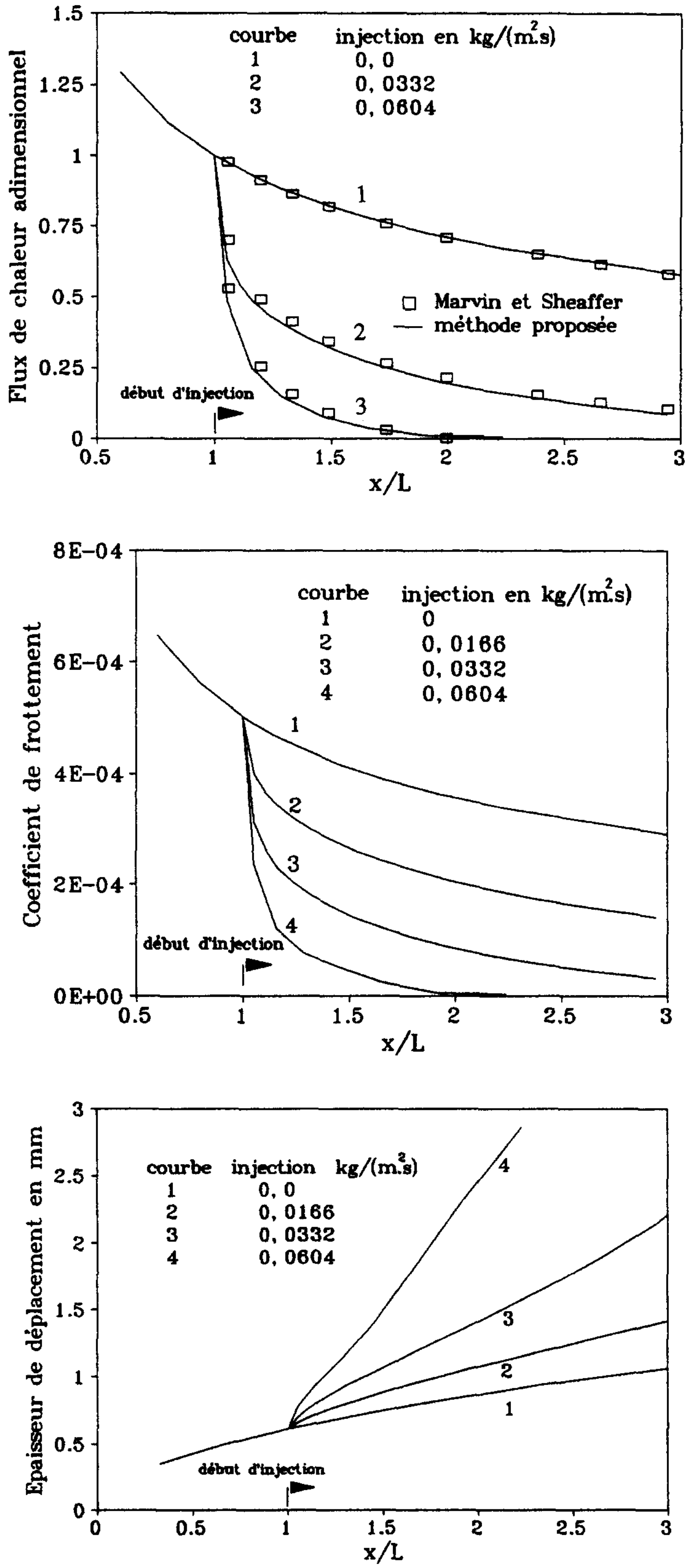

Fig. 5. (a) Quatrième cas : flux de chaleur adimensionnel en fonction de la coordonnée curviligne x/L, pour trois débits massiques d'injection d'hélium. (b) Quatrième cas : coefficient de frottement en fonction de la coordonnée curviligne x/L, pour quatre débits massiques d'injection d'hélium. (c) Quatrième cas : épaisseur de déplacement en fonction de la coordonnée curviligne x/L, pour quatre débits massiques d'injection d'hélium.

Tableau 2. Temps de calcul nécessaires à la résolution des cas étudiés

Cas	Temps de calcul
1	80 s
2	20 s
3	120 s
4(a)	80 s
4(b)	17 min
4(c)	25 min
4(d)	35 min

pour ces paramètres en fonction du type de problème concerné et de la précision des résultats obtenus ;

(6) les formules aux différences finies utilisées dans la discrétisation des dérivées par rapport à x ou ξ permettent, dans les cas d'écoulements sans gradient inverse de pression, d'augmenter les valeurs des pas de x et ξ au fur et à mesure que le calcul avance dans cette direction. Dans les cas contraires, les pas de x et ξ doivent être convenablement réduits au fur et à mesure qu'on s'approche du point de décollement de la couche limite. L'erreur associée à la valeur la plus importante du pas $\Delta\xi$ de ξ dans l'équation (23b) est [9]

$$\frac{\Delta\xi^2}{3}\frac{\partial^3 f}{\partial\xi^3},$$

f étant une fonction quelconque telle que F, F', θ et ω_1. Cependant, les termes du membre de droite des équations (17)–(19) indiquent que le paramètre à considérer dans une analyse d'erreurs est $\xi/\Delta\xi$ et non $\Delta\xi$. A ce sujet, Smith et Clutter [9] présentent une analyse succincte de l'influence du paramètre $\xi/\Delta\xi$ sur la sensibilité des résultats de l'équation (7) avec propriétés thermophysiques constantes.

(7) aucun effort n'a été fait pour optimiser la valeur initiale de η_e ainsi que les valeurs des pas de η, η_e et de x ou ξ ;

(8) l'utilisation des formules aux différences finies du deuxième ordre, pour la discrétisation des dérivées par rapport à x ou ξ, conduit à des résultats corrects dans les cas des écoulements sans gradient inverse de pression. Dans les cas contraires, une formule du troisième ordre est nécessaire, notamment pour la détermination du point de décollement ;

(9) une étude complémentaire a montré que la prise en compte, dans les équations de perturbation, des dérivées des termes de propriétés thermophysiques par rapport aux variables de perturbation n'a pas d'influence sur l'efficacité de la méthode et sur la précision des résultats ;

(10) la méthode développée peut être aisément modifiée pour calculer les couches limites d'autres écoulements externes, comme, par exemple, les écoulements sur une paroi adiabatique et sur une paroi à température variable.

On peut conclure, finalement, que l'extension de la méthode de Nachtsheim et Swigert à la résolution des équations du type couche limite laminaire non-isotherme et avec profils de vitesses non-semblables est fiable. L'inconvénient majeur de cette méthode numérique qui est le besoin d'une transformation de variables quelquefois complexe, est compensé par sa capacité à donner une grande précision de calcul de grandeurs locales importantes telles que la concentration du mélange gazeux, le gradient de vitesse et le gradient de température à la surface de la paroi.

Remerciements—Le premier auteur, maître de conférence du Département de Génie Mécanique de l'UFMG et boursier de la CAPES en France, remercie ces deux organismes pour leur soutien pendant la préparation de son doctorat a l'INSA de Lyon.

RÉFÉRENCES

1. E. R. G. Eckert, P. J. Schneider, A. A. Hayday et R. M. Larson, Mass-transfer cooling of a laminar boundary layer by injection of a light-weight foreign gas, *Jet Propulsion* **2,** 34–39 (1955).
2. H. S. Mickley, R. C. Ross, A. L. Squyers et W. E. Stewart, Heat, mass and momentum transfer for flow over a flat plate with blowing or suction, TN-3208, N.A.C.A., Washington, Juillet (1954).
3. L. C. Burmeister, *Convective Heat Transfer*. (1ère Edn), p. 790. Wiley, New York (1983).
4. S. Candel, *Mécanique des Fluides* (1ère Edn), p. 451. Dunod, Paris (1990).
5. J. Cousteix, *Couche Limite Laminaire* (1ère Edn), p. 627, Cepadues, Toulouse (1988).
6. F. M. White, *Viscous Fluid Flow* (2ème Edn), p. 614, McGraw-Hill, Singapore (1991).
7. N. A. Jaffe, R. C. Lind et M. O. Smith, Solution to the binary diffusion laminar boundary-layer equations with second-order transverse curvature, *AIAA J.* **9,** 1563–1569 (1967).
8. G. R. Inger et T. F. Swean, Vectored injection into laminar boundary layers with heat transfer, *AIAA J.* **5,** 616–622 (1975).
9. A. M. O. Smith et D. W. Clutter, Solution of the incompressible laminar boundary-layer equations, *AIAA J.* **9,** 2062–2071 (1963).
10. J. G. Marvin et Y. S. Sheaffer, A method for solving the nonsimilar laminar boundary-layer equations including foreign gas injection, A-3354, N.A.S.A., Langley (1969).
11. R. Peyret et T. D. Taylor, *Computational Methods for Fluid Flow* (3ème Edn), p. 358. Springer, New York (1990).
12. S. Roy et G. Nath, Unsteady laminar compressible swirling flow with massive blowing, *AIAA J.* **11,** 2064–2065 (1992).
13. E. Hytopoulos, J. A. Schetz et M. Gunzburger, Numerical solution of the compressible boundary-layer equations using the finite element method, *AIAA J.* **1,** 6–7 (1993).
14. J. A. Schetz, E. Hytopoulos et M. Gunzburger, Numerical solution of the incompressible boundary-layer equations using the finite element method, *J. Fluids Engng* **114,** 504–511 (1992).
15. C. Taylor et T. G. Hughes, *Finite Element Programming of the Navier–Stokes Equations* (1ère Edn), p. 244, Pineridge Press, Swansea (1981).
16. S. V. Patankar, *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow* (1ère Edn), p. 196. Hemisphere, New York (1980).
17. H. H. Chen et T. Cebeci, Bordering algorithm for solution of the boundary-layer equations in inverse mode, *AIAA J.* **12,** 2257–2259 (1991).

18. R. Nachtsheim et P. Swigert, Satisfaction of asymptotic boundary condition in numerical solution of systems of nonlinear equations of boundary-layer type, TN-D3004, N.A.S.A., Langley (1965).
19. W. R. Ferreira, Transferts de masse et de chaleur par convection naturelle sur un plaque plane verticale, Thèse de doctorat, Université Paul Sabatier, Toulouse (1992).
20. E. M. Sparrow, H. Quack et C. J. Boerner, Local non-similarity boundary-layer solutions, *AIAA J.* **11**, 1936–1942 (1969).
21. B. Carnahan, H. A. Luther et J. D. Wilkes, *Applied Numerical Methods* (2nd Edn.), p. 585. Wiley, New York (1961).
22. J. P. Hartnett et E. R. G. Eckert, Mass-transfer cooling in a laminar boundary layer with constant fluid properties, *Trans. ASME*, 247–254 (1955).

NACHTSHEIM AND SWIGERT METHOD EXTENDED TO THE STUDY OF THE TWO-DIMENSIONAL PLANE OR AXISYMMETRIC, NONISOTHERMAL, LAMINAR BOUNDARY-LAYER WITH BLOWING

Abstract—Nachtsheim and Swigert have developed a very efficient shooting method to solve the laminar boundary-layer equations of isothermal flows with similar velocty profiles. In this work, we present an extension of this method for the solving of nonsimilar boundary-layer equations of two-dimensional or axisymmetric external flow, with or without gas blowing and with or without pressure gradient. Variations of the two different fluid properties in a nonisothermal flow are taken into account. The efficiency of the proposed method is verified for four examples of laminar flows. A sample of the results for velocity, temperature and gas concentration profiles, friction coefficient and heat transfer on the wall surface, is compared with the results available in literature.